4ª LISTA DE MECÂNICA QUÂNTICA II
(2013-2)

1. Considere uma partícula espalhada por um potencial do tipo função delta com simetria esférica: $V(r) = \alpha \delta(r - a)$, onde α e a são constantes.
  - (a) Construa a expansão em ondas parciais para a onda espalhada e obtenha os deslocamentos de fase associados a cada componente.
  - (b) Obtenha a seção de choque de espalhamento no limite de baixas energias, ou seja, $a \ll \lambda$.
  - (c) Obtenha a amplitude de espalhamento utilizando a aproximação de Born. Tome o limite de baixa energia e compare com o resultado obtido no item anterior.
2. Considere uma partícula de massa m sob ação do potencial central

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

onde V_0 é uma constante positiva.

- (a) Escreva a equação radial para a função de onda da partícula. Obtenha a solução associada ao estado ligado ($E < 0$) com $l = 0$ (onda s).

Resposta:

$$u_0(r) = \begin{cases} A e^{-\alpha r} & r > a \\ B \operatorname{sen}(\sqrt{k_0^2 - \alpha^2} r) & r < a, \end{cases}$$

onde $k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}$ e $\alpha = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$.

- (b) Escreva a condição de continuidade da função de onda em $r = a$, e mostre a seguinte relação que determina a energia do estado ligado com $l = 0$:

$$\tan\left(\sqrt{k_0^2 - \alpha^2} a\right) = -\frac{\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

Mostre que não há estado ligado se a profundidade do potencial (V_0) for muito pequena.

- (c) Obtenha a solução associada ao espalhamento da partícula ($E > 0$) com $l = 0$ (onda s).

Resposta:

$$u'_0(r) = \begin{cases} A \operatorname{sen}(k r + \delta_0) & r > a \\ B \operatorname{sen}(\sqrt{k_0^2 + k^2} r) & r < a, \end{cases}$$

onde $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

3. Use a aproximação de Born para calcular a seção de choque de espalhamento para o potencial de Yukawa:

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}$$

4. Considere duas partículas idênticas, de massa m , confinadas em um poço quadrado de largura a :

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & 0 < x_1 < a \text{ e } 0 < x_2 < a \\ \infty & x_1, x_2 \leq 0 \text{ ou } x_1, x_2 \geq a. \end{cases}$$

Supondo que o estado de spin das partículas é simétrico:

- (a) Construa as funções de onda dos dois primeiros níveis de energia de bósons e férmions, partindo das funções de onda de uma partícula:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

- (b) Determine as energias permitidas a bósons e férmions.
 (c) Suponha que as partículas sejam levemente perturbadas por uma interação mútua do tipo

$$V'(x_1, x_2) = \frac{1}{2}m\Omega^2(x_1 - x_2)^2.$$

($\hbar\Omega \ll \hbar^2\pi^2/2ma^2$). Determine a correção na energia do estado fundamental de férmions e bósons em primeira ordem da teoria de perturbação.

- (d) Determine a correção na energia do primeiro estado excitado de bósons e compare com o resultado do item anterior para férmions. Discuta fisicamente a diferença entre os dois resultados.

5. Duas partículas idênticas encontram-se sob a ação de um potencial harmônico com hamiltoniano

$$H = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1).$$

O sistema é afetado por uma perturbação do tipo

$$V = ig(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1).$$

Determine a correção de primeira ordem dos dois primeiros níveis de energia de:

- (a) Partículas distinguíveis,
 (b) Bósons,
 (c) Férmions.